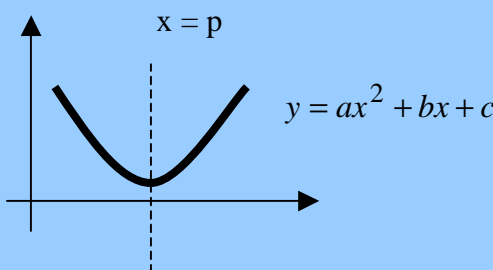


4.3. WYKRES FUNKCJI KWADRATOWEJ

Wykres funkcji kwadratowej
Wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku $W = (p, q)$, która jest obrazem paraboli o równaniu $y = ax^2$, w przesunięciu o wektor $\vec{u} = [p, q]$.
Jeśli $a > 0$, to ramiona paraboli są skierowane do góry, jeśli $a < 0$, to ramiona paraboli są skierowane do dołu.
Wykres funkcji kwadratowej jest symetryczny względem prostej o równaniu $x = p$.


Przykład 4.3.1. Na podstawie podanych wzorów odczytaj jak są skierowane ramiona paraboli:

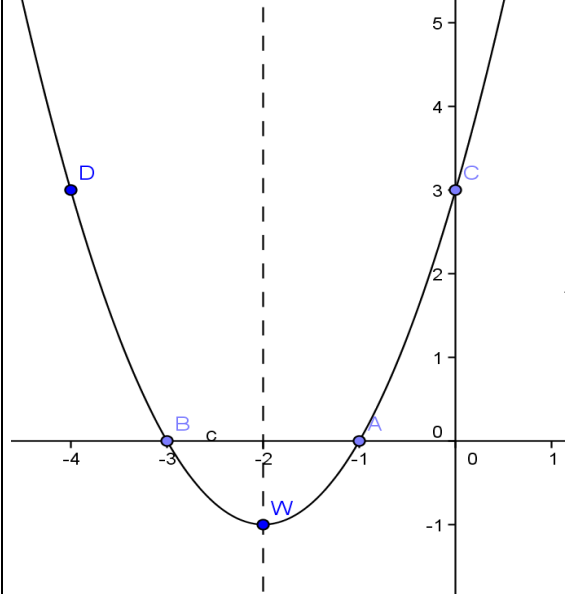
a) $y = 2x^2 + 4x$

Rozwiązanie	Komentarz
$a = 2$ Ramiona paraboli są skierowane do góry	Ponieważ $a > 0$, to ramiona paraboli są skierowane do góry.

b) $y = x - x^2 + 5$

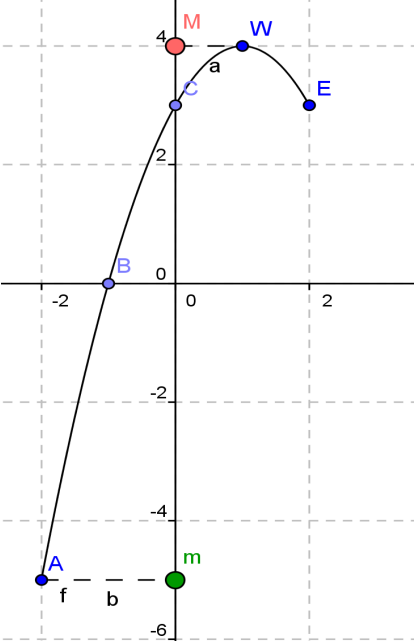
Rozwiązanie	Komentarz
$a = -1$ Ramiona paraboli są skierowane do dołu	Ponieważ $a < 0$, to ramiona paraboli są skierowane do dołu.

Przykład 4.3.2. Narysuj wykres funkcji: $y = x^2 + 4x + 3$.

Rozwiązanie	Komentarz
$a = 1; b = 4; c = 3$ $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$	Wypisujemy współczynniki funkcji kwadratowej i obliczymy Δ .
$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 - 2}{2} = -3$ $x_2 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 + 2}{2} = -1$ $A = (-1, 0); B = (-3, 0)$ - współrzędne punktów przecięcia paraboli z osią OX	Obliczmy miejsca zerowe funkcji kwadratowej korzystając ze wzorów $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ Zapisujemy współrzędne punktów przecięcia paraboli z osią OX.
$p = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$ $q = \frac{-4}{4 \cdot 1} = -1$ $W = (-2, -1)$	Obliczamy współrzędne wierzchołka korzystając ze wzorów $p = \frac{-b}{2a}; q = \frac{-\Delta}{4a}$
$y = 0^2 + 4 \cdot 0 + 3 = 3$ $C = (0, 3)$ - współrzędne punktu przecięcia paraboli z osią OY	Wyznaczamy współrzędne punktu przecięcia paraboli z osią OY, wstawiając za x zero.
	Wyznaczone punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych. Możemy zaznaczyć punkt D symetryczny do punktu C przecięcia paraboli z osią OY względem prostej $x = p = -2$. Łącząc wszystkie punkty otrzymujemy parabolę która jest wykresem danej funkcji kwadratowej.

Przykład 4.3.3. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 \text{ w przedziale } \langle -2, 2 \rangle.$$

Rozwiązanie	Komentarz
$a = -1; b = 2; c = 3$ $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16$	Wypisujemy współczynniki funkcji kwadratowej i obliczymy Δ .
$f(-2) = -(-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 3 = -5$ $f(2) = -2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = 3$	Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału $\langle -2, 2 \rangle$
$p = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1 \quad q = \frac{-16}{4 \cdot (-1)} = 4$	Obliczamy współrzędne wierzchołka korzystając ze wzorów $p = \frac{-b}{2a}; q = \frac{-\Delta}{4a}$
$p \in \langle -2, 2 \rangle$ $m_{\langle -2, 2 \rangle} = -5$ - wartość najmniejsza funkcji w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$ $M_{\langle -2, 2 \rangle} = 4$ - wartość największa funkcji w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$	Sprawdzamy, czy p należy do przedziału $\langle -2, 2 \rangle$, w którym szukamy wartości najmniejszej i wartości największej. Ponieważ $p \in \langle -2, 2 \rangle$, to najmniejszą i największą wartość wybieramy spośród wartości funkcji na krańcach przedziału i drugiej współrzędnej wierzchołka: $-5, 3, 4$. Gdyby $p \notin \langle -2, 2 \rangle$, to najmniejszą i największą wartość wybieralibyśmy spośród wartości funkcji na krańcach przedziału: $-5, 3$.
	Wartość najmniejszą i wartość największą funkcji w przedziale domkniętym możemy odczytać z jej wykresu wykonanego w danym przedziale.

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 4.3.1. Oblicz współrzędne punktów przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych:

a) (2pkt.) $y = x^2 + 6x + 10$

b) (2pkt.) $y = -x^2 + 6x - 9$

c) (2pkt.) $y = x^2 - 4$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie punktów przecięcia paraboli z osią OX	1
2	Podanie punktu przecięcia paraboli z osią OY	1

Ćwiczenie 4.3.2. Narysuj wykres funkcji:

a) (5pkt.) $y = -x^2 + 3x$

b) (5pkt.) $y = x^2 + 2x + 3$

Z wykresu odczytaj zbiór wartości funkcji.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie miejsc zerowych.	1
2	Podanie współrzędnych wierzchołka.	1
3	Podanie współrzędnych punktu przecięcia paraboli z osią OY	1
4	Narysowanie wykresu funkcji	1
5	Podanie zbioru wartości funkcji.	1

Ćwiczenie 4.3.3. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale domkniętym:

a) (4pkt.) $y = x^2 - 6x + 3$ $\langle 0,4 \rangle$

b) (4pkt.) $y = -x^2 + 3x + 4$ $\langle 4,5 \rangle$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wartości funkcji na końcach podanego przedziału domkniętego.	1
2	Podanie współrzędnych wierzchołka.	1
3	Podanie wartości najmniejszej w podanym przedziale.	1
4	Podanie wartości największej w podanym przedziale.	1